## Aufgabe 1: Grundlagen der Differentialrechnung (12 Punkte)

| | | |
|---|---|---|
| a) | Betrachten Sie die Funktion: $$f(x) = x^3 - 2x^2$$ Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.<br>R F<br>❑ ❑ $f$ hat genau eine Nullstelle, nämlich bei $x = 2$.<br>❑ ❑ $f$ hat eine Extremstelle bei $x = 0$.<br>❑ ❑ $f$ ist auf dem Intervall $[0; \frac{4}{3}]$ monoton wachsend.<br>❑ ❑ $f$ hat eine Wendestelle bei $x = \frac{2}{3}$. | / 3 P |

| | | |
|---|---|---|
| b) | Betrachten Sie die Funktion: $$f(x) = (4x + 2)^2$$ Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.<br>R F<br>❑ ❑ $f$ hat die Ableitungsfunktion $f'(x) = 32x + 16$.<br>❑ ❑ $f$ ist auf $]-\infty; 0]$ monoton fallend und auf $[0; \infty[$ monoton wachsend.<br>❑ ❑ $f$ hat eine horizontale Tangente bei $x = -0.5$.<br>❑ ❑ $f$ hat ein globales Maximum bei $x = -0.5$. | / 3 P |

## Aufgabe 1: Fortsetzung

| | | |
|---|---|---|
| c) | Betrachten Sie die Funktion:<br>$$f(x) = (x-2)^2 + 3$$<br>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.<br>R F<br>❑ ❑ $f$ hat auf dem Intervall $[2; 4]$ eine durchschnittliche Steigung von $2$.<br>❑ ❑ $f$ hat eine Extremstelle bei $x = 2$.<br>❑ ❑ $f$ hat eine Wendestelle bei $x = 2$.<br>❑ ❑ $f$ hat eine Nullstelle bei $x = 2$. | / 3 P |

| | | |
|---|---|---|
| d) | Betrachten Sie die Funktion:<br>$$f(x) = e^x$$<br>Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.<br>R F<br>❑ ❑ $f$ hat keine Extremstellen.<br>❑ ❑ $f$ hat eine Wendestelle bei $x = 1$.<br>❑ ❑ $f$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ monoton wachsend.<br>❑ ❑ $f$ hat eine Extremstelle bei $x = 0$. | / 3 P |

## Aufgabe 2: Untersuchung von Funktionen (16 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{3}x^3$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f$. ___ / 2 P

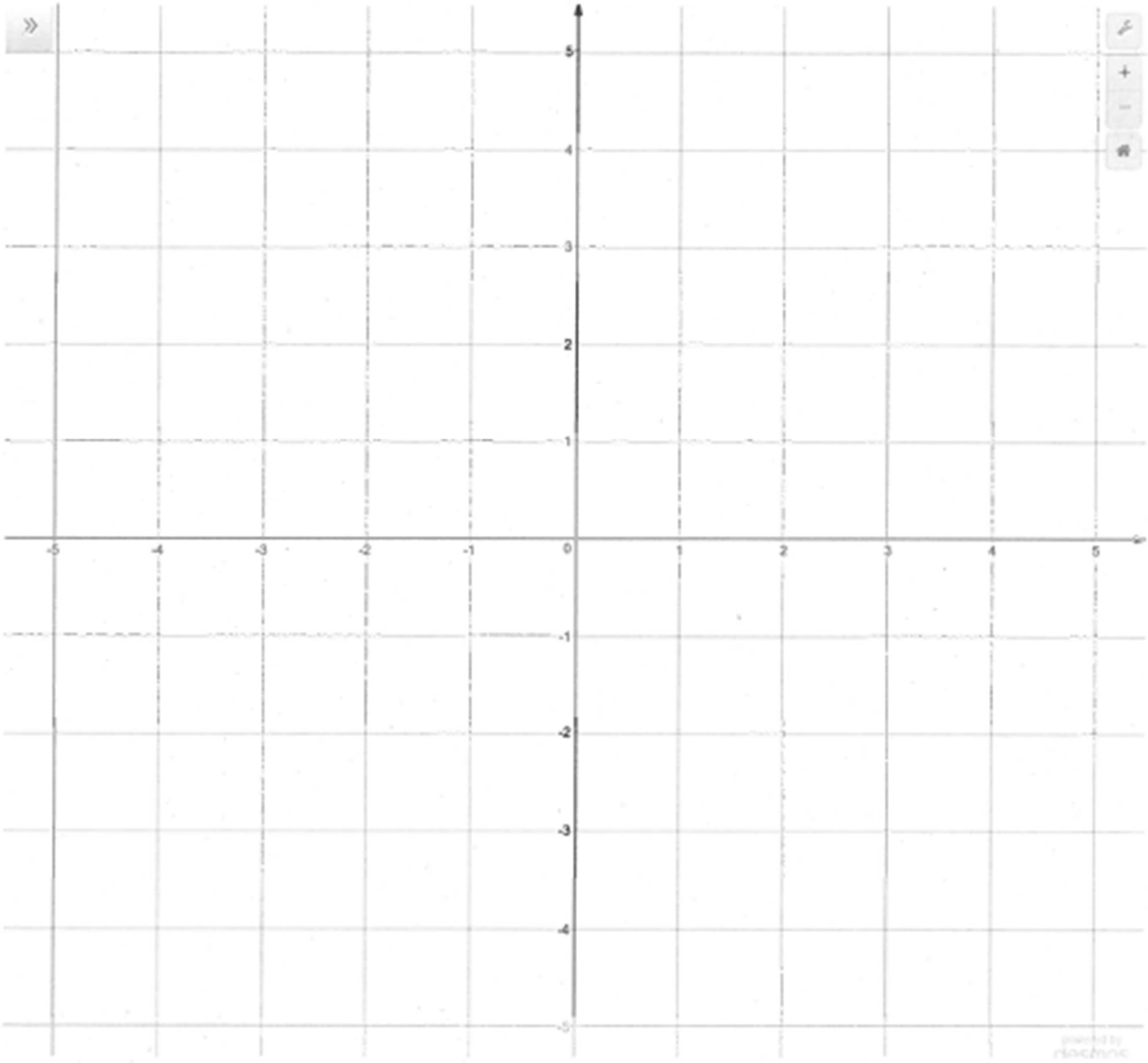
b) Bestimmen Sie die Extrempunkte von $f$ (also $x$- und $y$-Koordinate) und zeigen Sie jeweils, ob es sich dabei um ein Minimum oder Maximum handelt. ___ / 6 P

## Aufgabe 2: Fortsetzung

c) Bestimmen Sie die Wendepunkte von $f$ ($x$- und $y$-Koordinate) und zeigen Sie jeweils, ob es sich um eine konvex-konkave Wendestelle (oder um eine konkav-konvexe) handelt. ____ / 4 P

## Aufgabe 2: Fortsetzung

d) Zeichnen Sie die Punkte, welche Sie unter a) – c) ermittelt haben, in das unten stehende Raster, beschriften Sie diese Punkte und skizzieren Sie den Graphen von $f$. ____ / 4 P



## Aufgabe 3: Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Probleme (1) (12 Punkte)

a) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.

/ 3 P

| R | F | |
|---|---|---|
| ❑ | ❑ | Die Elastizität von $f$ ist $\varepsilon_{f,x} = -2$ |
| ❑ | ❑ | Die Elastizität von $f$ ist $\varepsilon_{f,x} = -1$ |
| ❑ | ❑ | Wenn $x$ um 1% zunimmt, nimmt $f$ um ca. 1% ab. |
| ❑ | ❑ | Die Elastizität ist für diese Funktion nicht definiert. |

b) Betrachten Sie die Preis-Absatzfunktion $x(p) = 10 - 2p$ für ökonomisch sinnvolle Preise aus dem Intervall $D_{ökon} = [0; 5[$.

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.

/ 3 P

| R | F | |
|---|---|---|
| ❑ | ❑ | $x(p)$ ist stets unelastisch für alle Preise von $D_{ökon}$. |
| ❑ | ❑ | Bei einem Preis von $p = 2.5$ hat eine Preiserhöhung von1% einen Absatzrückgang von 1% zur Folge. |
| ❑ | ❑ | Die Preiselastizität der Nachfrage $\varepsilon_{x,p}$ ist negativ für alle Preise von $D_{ökon}$. |
| ❑ | ❑ | Eine Preiselastizität der Nachfrage von $\varepsilon_{x,p} = 0$ ist mit dieser Preis-Absatzfunktion nicht möglich. |

## Aufgabe 3: Fortsetzung

c) Gegeben ist die folgende Kostenfunktion:

$$K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 8x + 5$$

c1) Berechnen Sie die Schwelle des Ertragsgesetzes von $K$. ____ / 4 P

c2) Welche ungefähren Kosten verursacht eine zusätzlich produzierte Einheit an der Schwelle des Ertragsgesetzes? ____ / 2 P

## Aufgabe 4: Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Probleme (2) (14 Punkte)

Ein monopolistischer Anbieter bewegt sich in einem Markt, in dem der Zusammenhang zwischen absetzbarer Menge $x$ und realisierbarem Preis $p$ durch die Preis-Absatz-Funktion

$$x(p) = -\frac{1}{35}p + 24$$

gegeben ist.

Die gesamten Produktionskosten lassen sich in Abhängigkeit der Produktionsmenge $x$ durch die ertragsgesetzliche Kostenfunktion

$$K(x) = 2x^3 - 50\,x^2 + 500\,x + 1500$$

beschreiben.

a) Bestimmen Sie die Grenzerlösfunktion bezüglich des Preises. ___ / 2 P

b) Bei welcher Absatzmenge (= Produktionsmenge) erzielt der Anbieter den maximalen Erlös? ___ / 3 P

## Aufgabe 4: Fortsetzung

c) Bei welcher Absatzmenge (= Produktionsmenge) erzielt der Anbieter den maximalen Gewinn? ____ / 6 P

d) Bei welcher Produktionsmenge sind die Stückkosten minimal? ____ / 3 P

## Aufgabe 5: Funktionen mit mehrerer Variablen (12 Punkte)

a) Bestimmen Sie für die folgenden vier Funktionen jeweils die angegebenen partiellen Ableitungen.

a1) $f(x,y) = -x^2 + 40x + 2xy + 200y - 2y^2$ ____ / 1 P

$$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

a2) $g(u,v) = \frac{u}{v}$ ____ / 1 P

$$g_{vv} =$$

a3) $h(x,y) = e^{x+2y}$ ____ / 1 P

$$\frac{\partial h}{\partial y} =$$

a4) $k(s,t) = 2s^2 - 200s - 2st - 40t + t^2$ ____ / 1 P

$$k_s =$$

## Aufgabe 5: Fortsetzung

b) Der Gewinn $G$ einer Ein-Produkt-Unternehmung hängt von den Ausgaben $x$ für Werbung und $y$ für Forschung wie folgt ab (Alle Beträge in Tausend CHF pro Jahr):

$$G(x,y) = 200x + 40y + 2xy - 2x^2 - y^2$$

b1) Welche Beträge sollte die Unternehmung für Werbung und Forschung einsetzen, damit sie den maximalen Gewinn erzielt? ____ / 3 P

**Hinweis**: Verwenden Sie dabei die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 200 + 2y - 4x \quad \text{und} \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 40 + 2x - 2y$$

b2) Zeigen Sie, dass es sich bei Ihrer Lösung erstens um ein Extremum und zweitens um ein Gewinnmaximum handelt. ____ / 2 P

## Aufgabe 5: Fortsetzung

b3) Wie hoch ist der maximale Gewinn? ____ / 1 P

b4) Der Verwaltungsrat beschliesst, die Ausgaben für Forschung komplett zu streichen, d.h. 0 CHF für Forschung auszugeben. ____ / 2 P

Welcher Betrag sollte dann für Werbung ausgegeben werden, um den Gewinn zu maximieren?

## Aufgabe 6: Grundlagen der Integralrechnung (1) (12 Punkte)

a) Betrachten Sie die folgende Funktion: /3 P

$$f(x) = x + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.

R F

❑ ❑ $F(x) = x^2 + 3\sqrt{x} + 3$ ist eine Stammfunktion von $f$.

❑ ❑ $F(x) = 0.5x^2 - 6\sqrt{x} + 3$ ist eine Stammfunktion von $f$.

❑ ❑ $F(x) = \frac{1}{2}\left[x^2 - 3\sqrt{x} - 3\right]$ ist eine Stammfunktion von $f$.

❑ ❑ $F(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 12\sqrt{x} + 6\right)$ ist eine Stammfunktion von $f$.

b) Die Population $P$ wächst gemäss folgender Differentialgleichung (DGL): /3 P

$$P'(t) = 10e^t$$

Der Anfangsbestand war $P(0) = 25$.

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.

R F

❑ ❑ Es gibt keine Funktion $P(t)$, welche Lösung der DGL ist.

❑ ❑ Die spezielle Lösung der DGL lautet $P(t) = 25e^t$.

❑ ❑ Die Verdoppelung des Anfangsbestands war bei $t = 10$.

❑ ❑ Die allgemeine Lösung der DGL lautet $P(t) = 10e^t + C$.

## Aufgabe 6: Fortsetzung

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche von $f(x) = 1$ und $g(x) = (x-2)^2$ zwischen deren Schnittpunkten eingeschlossen wird. ____ / 6 P

(Wichtiger Hinweis: Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein. Insbesondere müssen Stammfunktionen und deren Auswertungen ersichtlich sein. Reine Rechnerlösungen werden nicht bewertet.)

## Aufgabe 7: Grundlagen der Integralrechnung (2) (12 Punkte)

a) Gegeben sind die Nachfrage- und die Angebotsfunktion:

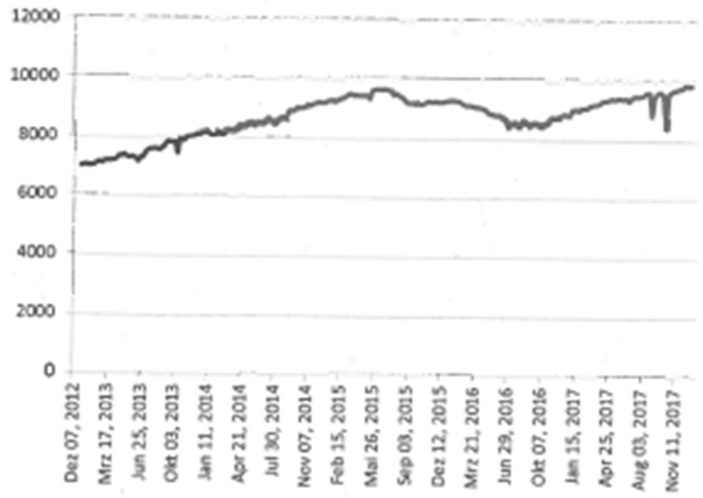
$$p_N(x) = -0.5x + 20 \text{ und } p_A(x) = x + 5$$

a1) Berechnen Sie die Konsumentenrente im Marktgleichgewicht. ____ / 4 P

## Aufgabe 7: Fortsetzung

a2) Berechnen Sie die Produzentenrente im Marktgleichgewicht. ___ / 2 P

b) In der folgenden Graphik ist die tägliche Rohölförderung in den USA von 2013 bis 2017 abgebildet. (in Tausend Barrel pro Tag)




b1) Kennzeichnen Sie in der Graphik die Menge, welche der gesamten Rohölförderung zwischen dem 3. Oktober 2013 und dem 7. Oktober 2016 entspricht. ___ / 2 P

## Aufgabe 7: Fortsetzung

b2) Ein Analyst hat für die tägliche Fördermenge $m$ im Zeitraum 2013 – 2017 folgendes Rechenmodell bestimmt: ____ / 4 P

$$m(t) = 92t^3 - 855t^2 + 2600t + 6500$$

Damit lässt sich die gesamte Rohölfördermenge $M$ zwischen zwei beliebigen Zeitpunkten $t_1$ und $t_2$ wie folgt berechnen:

$$M(t_1, t_2) = 365\int_{t_1}^{t_2} m(t)dt$$

Wie gross ist gemäss diesem Modell die gesamte Fördermenge der Jahre 2013 – 2017?

(Hinweis: $t_2$ ist die Anzahl vergangener Jahre seit dem 1. Januar 2013, welcher als $t_1 = 0$ festgesetzt wurde.)

**ENDE DER PRÜFUNG**