## Aufgabe 1: Multiple Choice (14 Punkte)

Nachstehend finden Sie sieben Multiple-Choice-Fragen. Es werden jeweils fünf mögliche Antworten gegeben. Von diesen fünf Antworten ist jeweils genau eine richtig.

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwort an. Sie erhalten pro Frage 2 Punkte, wenn Sie die richtige Antwort angekreuzt haben. Haben Sie die falsche Antwort angekreuzt oder mehrere Antworten angekreuzt, erhalten Sie für die entsprechende Frage keinen Punkt.

*Rechenwege oder zusätzliche Anmerkungen werden bei der Bewertung dieser Aufgabe nicht berücksichtigt.*

___ / 14 P.

(a) Welche Steigung hat die Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ an der Stelle $x = 0$?

- ○ $-4$
- ○ $-2$
- ○ $0$
- ○ $2$
- ○ $4$

(b) Sie untersuchen eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion $f$ (ein Polynom). Sie finden heraus, dass die erste Ableitung genau zwei Nullstellen hat, nämlich eine bei $x = -2$ und eine bei $x = 2$. Sie finden weiterhin heraus, dass $f''(-2) = -5$ und $f''(2) = 5$ ist.

Dann wissen Sie, dass genau eine der folgenden Aussagen richtig ist. Welche?

- ○ $f$ hat bei $x = -2$ ein lokales Maximum und bei $x = 2$ ein lokales Minimum. Globale Extrema hat die Funktion nicht.
- ○ $f$ hat bei $x = -2$ ein globales Minimum und bei $x = 2$ ein globales Maximum.
- ○ $f$ hat bei $x = -2$ die Steigung $-5$ und bei $x = 2$ die Steigung $5$.
- ○ $f$ hat bei $x = -2$ eine konkav-konvexe und bei $x = 2$ eine konvex-konkave Wendestelle.
- ○ $f$ hat bei $x = -2$ eine konvex-konkave und bei $x = 2$ eine konkav-konvexe Wendestelle.

## Aufgabe 1: Fortsetzung

(c) Bei welcher der folgenden Funktionen handelt es sich um eine Stammfunktion der Funktion

$$f(x) = -\frac{2}{x^2}\ ?$$

- ○ $F(x) = --2\ln(x^2)$
- ○ $F(x) = \frac{2}{x}$
- ○ $F(x) = -\frac{2\ln x}{x}$
- ○ $F(x) = -\frac{1}{x^2}$
- ○ $F(x) = \frac{6}{x^3}$

(d) Ein Anbieter stellt fest, dass für sein Produkt die Preiselastizität der Nachfrage $\varepsilon_{x,p}$ gleich $-1$ ist. Das Management überlegt, den Verkaufspreis des Produkts geringfügig zu erhöhen. Welches der folgenden Ziele kann durch diese Massnahme **sicherlich nicht** erreicht werden?

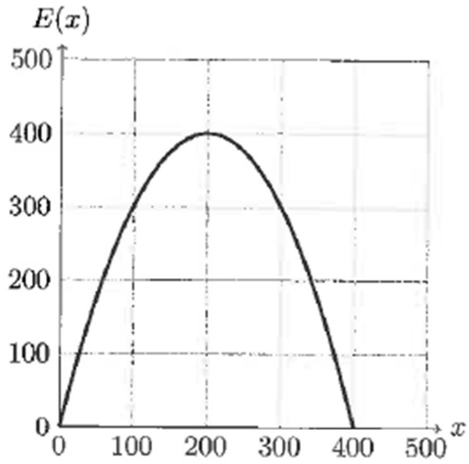
- ○ Eine Senkung der Gesamtkosten.
- ○ Eine Senkung der variablen Kosten.
- ○ Eine Steigerung des Deckungsbeitrags.
- ○ Eine Steigerung des Erlöses.
- ○ Eine Steigerung des Gewinns.

## Aufgabe 1: Fortsetzung

(e) Das folgende Diagramm zeigt die Erlösfunktion

$$E(x) = 4x - \frac{1}{100}x^2.$$

Dabei ist $x$ die verkaufte Menge in Stück, $E(x)$ der Erlös in Franken.

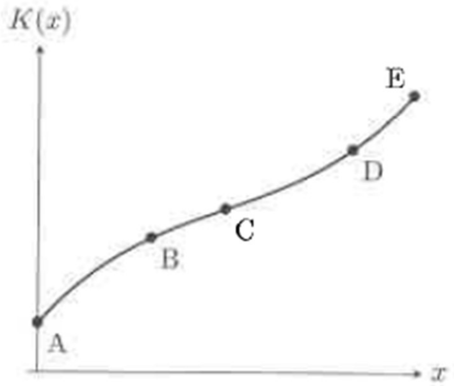



Wie hoch ist Grenzerlös bei einer Absatzmenge von 100 Stück?

- ○ 2 Franken,
- ○ 0.5 Franken,
- ○ 0 Franken,
- ○ −0.5 Franken,
- ○ −2 Franken.

## Aufgabe 1: Fortsetzung

(f) Das folgende Diagramm zeigt die Kostenfunktion eines Produzenten, d. h. die Kosten $K(x)$ in Abhängigkeit von der hergestellten Menge $x$.

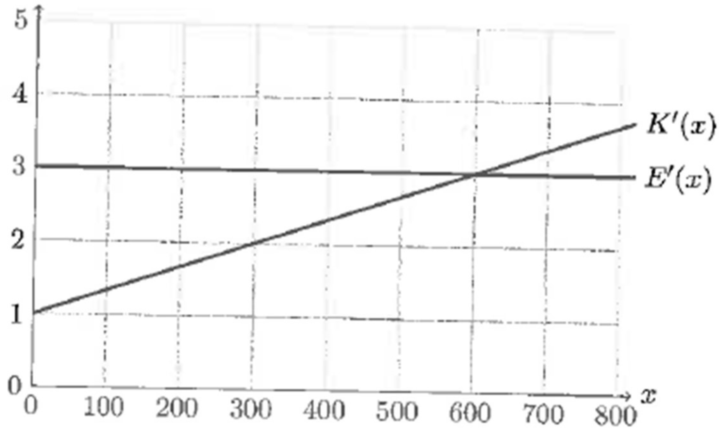



Welcher der Punkte A bis E stellt das Betriebsoptimum dar?

- ○ A
- ○ B
- ○ C
- ○ D
- ○ E

## Aufgabe 1: Fortsetzung

(g) Das folgende Diagramm zeigt die Grenzkosten $K'(x)$ und den Grenzerlös $E'(x)$ eines Anbieters (jeweils in Franken) in Abhängigkeit von der produzierten und verkauften Menge $x$ (in Stück):




Wie hoch ist der Gesamt-Deckungsbeitrag im Gewinnmaximum?

- ◯ 0 Franken,
- ◯ 300 Franken,
- ◯ 600 Franken,
- ◯ 900 Franken,
- ◯ 1200 Franken.

## Aufgabe 2: Grundlagen der Differentialrechnung (8 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

**(a)** $f(x) = \sqrt[7]{x^3}$ ___ / 2 P.

(b) $g(x) = 2^{x^2}$ ___ / 3 P.

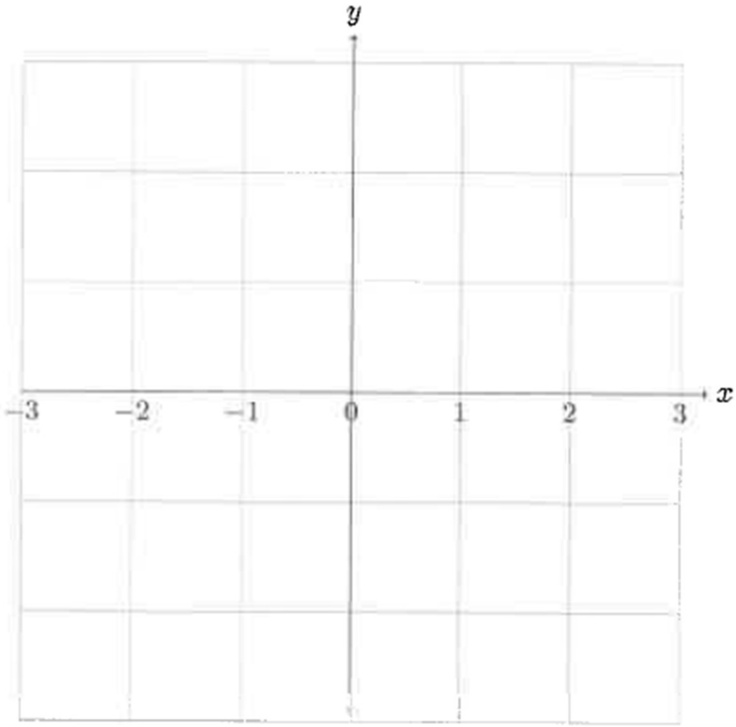
## Aufgabe 2: Fortsetzung

(c) $h(x) = x \cdot \ln(2x + 1)$ ___ / 3 P.

## Aufgabe 3: Untersuchung von Funktionen (15 Punkte)

1. Sie hat zwei Nullstellen, bei $x = -1$ und $x = 2$.
2. Sie hat ein Maximum bei $x = 0$ und ein Minimum bei $x = 2$.
3. Sie hat einen Wendepunkt bei $x = 1$.

Skizzieren Sie den Graphen *irgendeiner* Funktion, die genau nur die obigen Eigenschaften hat. Somit soll Ihr Graph insbesondere keine weiteren Nullstellen, keine weiteren Extremstellen und auch keine weiteren Wendestellen haben. ___ / 5 P.



## Aufgabe 3: Fortsetzung

(b) Krankheitsverläufe in der Bevölkerung lassen sich gut durch Polynome dritten Grades beschreiben. Die folgende Funktion $p(t)$ gibt zu jedem Zeitpunkt $t$ (in Tagen) mit $0 \leq t \leq 30$ den Prozentsatz der erkrankten Personen in der Bevölkerung an:

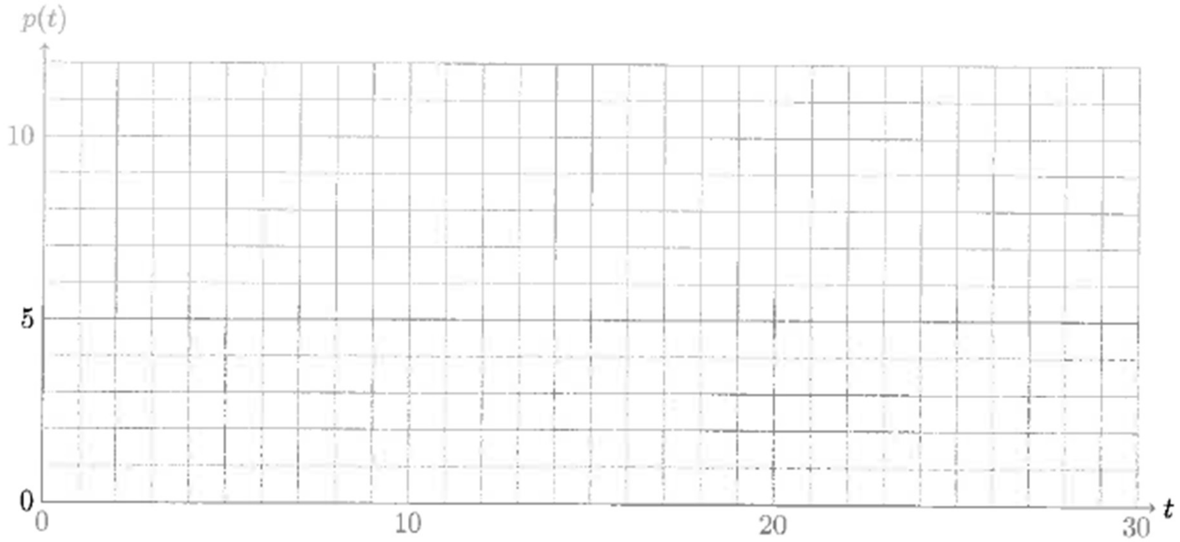
$$p(t) = 0.0025 \cdot (30t^2 - t^3).$$

(i) In welchem Zeitraum nimmt $p(t)$ zu, in welchem Zeitraum nimmt $p(t)$ ab? ___ / 5 P.

## Aufgabe 3: Fortsetzung

(ii) Wann erreicht der Krankheitsverlauf den Höhepunkt? ___ / 2 P.

(iii) Skizzieren Sie den Graphen von $p(t)$. ___ / 3 P.



## Aufgabe 4: Funktionen mehrerer Variabler (8 Punkte)

Ein Unternehmen stellt ein Produkt in den zwei Ausführungsvarianten «Basic» und «Progress» her. Der Gewinn kann in Abhängigkeit von den verkauften Einheiten wie folgt modelliert werden:

$$G(x, y) = 520x + 820y - 4x^2 - 8xy - 10y^2 - 2000.$$

Dabei bezeichnet $x$ die monatlich verkaufte Anzahl Stück der Variante «Basic» und $y$ die monatlich verkaufte Anzahl Stück der Variante «Progress».

Welche monatlichen Verkaufszahlen für die beiden Ausführungsvarianten würden gemäss diesem Modell zum Gewinnmaximum führen? Zeigen Sie, dass es sich bei Ihrer Lösung um ein Maximum handelt!

## Aufgabe 4: Fortsetzung

## Aufgabe 5: Grundlagen der Integralrechnung (15 Punkte)

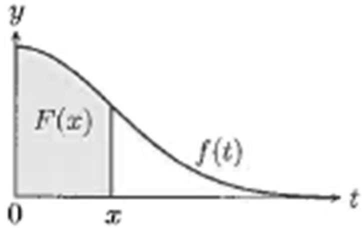
(a) Finden Sie jeweils eine Stammfunktion zu den folgenden Funktionen.

(i) $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ___ / 3 P.

(ii) $h(x) = \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x}$ ___ / 3 P.

## Aufgabe 5: Fortsetzung

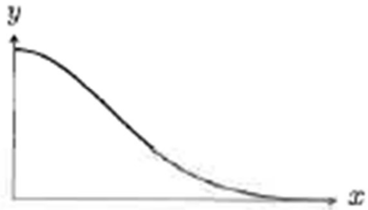
(b) Mit $F(x)$ bezeichnen wir den Inhalt der in der folgenden Skizze markierten Fläche:

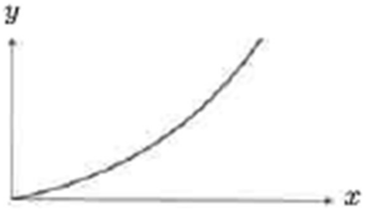


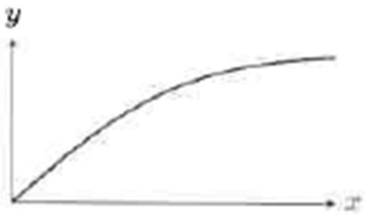

Welches der folgenden vier Diagramme stellt den Graphen von $F$ dar? (Bitte ankreuzen!)

○



○



○



○



___ / 3 P.

(c) Welcher Zusammenhang besteht in Teilaufgabe (b)? (Bitte ankreuzen!)

- ○ $F(x) = f'(x)$,
- ○ $f(x) = \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t$,
- ○ $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$,
- ○ $F(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$,
- ○ $F(x) = \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t$.

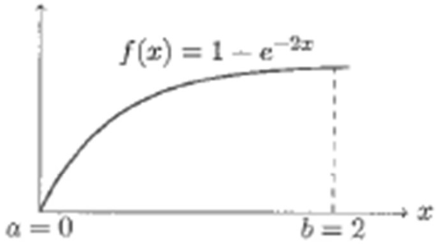
___ / 3 P.

## Aufgabe 5: Fortsetzung

(d) Der «Durchschnitt» $D$ einer Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a;b]$ ist definiert als

$$D = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bestimmen Sie $D$ für die nachfolgend abgebildete Situation. ___ / 3 P.



## Aufgabe 6: Ökonomische Anwendungen I (15 Punkte)

(a) Ein Anbieter habe die Kostenfunktion

$$K(x) = \frac{2}{1000}x^3 - 2.58x^2 + 1200x + 136\,620.$$

Dabei entspricht $x$ der produzierten Menge (in Stück) und $K$ den Gesamtkosten (in Franken).

Der Anbieter verkauft sein Produkt zu einem Preis von 744 Franken pro Stück.

Bei welcher Menge wird das Gewinnmaximum erreicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

___ / 7 P.

## Aufgabe 6: Fortsetzung

(b) Ein anderer Anbieter habe die Kostenfunktion

$$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Dabei entspricht $x$ der produzierten Menge (in Stück) und $K$ den Gesamtkosten (in Franken).

Für die Kostenfunktion soll Folgendes gelten:

- Die Kostenfunktion habe eine konkav-konvexe Wendestelle bei $x = 40$.
- Dort, wo die Grenzkostenfunktion ihr Minimum hat, betragen die Grenzkosten 24 Franken.
- Die Grenzkosten bei $x = 0$ betragen 120 Franken.
- Das Gut werde für 90 Franken pro Stück verkauft. Bei 100 produzierten und verkauften Stück sei der Gewinn gleich null.

Bestimmen Sie die Parameter $a$, $b$, $c$ und $d$. ___ / 8 P.

## Aufgabe 6: Fortsetzung

## Aufgabe 7: Ökonomische Anwendungen II (15 Punkte)

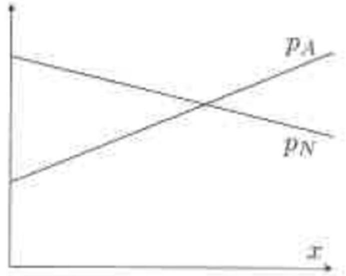
(a) Gegeben sind die Angebotsfunktion

$$p_A(x) = 0.5x + 16$$

und die Nachfragefunktion

$$p_N(x) = 40 - 0.3x.$$

Damit Sie sich das besser vorstellen können, hier eine Skizze:




(i) Bestimmen Sie das Marktgleichgewicht (Gleichgewichtsmenge und Gleichgewichtspreis).

___ / 3 P.

## Aufgabe 7: Fortsetzung

(ii) Wie hoch ist die Produzentenrente im Marktgleichgewicht?

(Falls Sie Teil (a)(i) nicht gelöst haben, gehen Sie von einer Gleichgewichtsmenge von $x = 40$ aus.)

___ / 3 P.

## Aufgabe 7: Fortsetzung

(b) Von einem neuen Produkt wird angenommen, dass sich die täglich nachgefragte Menge $x$ (in Anzahl Stück) mit fortschreitender Zeit $t$ (in Tagen) stark reduzieren wird.

Die Nachfrage $x(t)$ wird beschrieben durch

$$x(t) = C \cdot e^{-5t} + 2\,400.$$

Dabei ist $C$ eine Konstante.

(i) Es wird angenommen, dass sich zum Zeitpunkt $t = 0$

$$x(0) = 10\,000$$

Stück absetzen lassen. Bestimmen Sie $C$. ___ / 3 P.

## Aufgabe 7: Fortsetzung

(ii) Berechnen Sie $x'(t)$. ___ / 3 P.

(iii) Zeigen Sie, dass die Nachfragemenge $x(t)$ der Differentialgleichung

$$x'(t) = 12\,000 - 5x(t)$$

genügt. ___ / 3 P.

**ENDE DER PRÜFUNG**