

Aufgabe 1: Mengen / Summen

(10 Punkte)

- a) Geben Sie die folgende Menge M_1 in der Intervallschreibweise an.

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x\}$$

___ / 2 P.

- b) Geben Sie die folgende Menge M_2 in aufzählender Form an.

$$M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)^2 = 64 \vee |x| = 5\}$$

___ / 3 P.

Aufgabe 1: Fortsetzung

c) Der Funktionsausdruck einer Funktion $f = f(x)$ ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k=2}^4 \frac{1}{k} \cdot x^{2k}$$

Geben Sie den Funktionsausdruck $f(x)$ ohne Summenzeichen an.

___ / 2 P.

d) Schreiben Sie die folgende Summe S mit dem Summenzeichen:

$$S = 4^3 + 6^3 + 8^3 + 10^3 + \dots + 98^3 + 100^3$$

Die Summe S soll nicht ausgerechnet werden.

___ / 3 P.

Aufgabe 2: Folgen und Reihen

(15 Punkte)

(a) Von einer geometrischen Folge kennt man $a_2 = 10$ und $a_4 = 12.1$. Dann ist a_3 gleich

[1 Kreuz]

- 11.05
- 11
- 13.50
- 13.10
- 13.31

___ / 2 P.

(b) Der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}n^3 - 7000n^2}{2n^3 + 8n}$$

ist

[1 Kreuz]

- $-\frac{7000}{8}$
- $\sqrt{2}$
- $\frac{1}{2}$
- 0
- $\frac{1}{\sqrt{2}}$

___ / 2 P.

Aufgabe 2: Fortsetzung

(c) Der Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

ist

[1 Kreuz]

$\frac{9}{16}$

$\frac{4}{7}$

$-\frac{3}{4}$

$\frac{9}{28}$

$\frac{4}{3}$

___ / 3 P.

(d) Die Dividendenzahlungen (pro Aktie) in den nächsten 20 Jahren der Firma X bilden eine arithmetische Folge. Die Dividende beträgt im ersten Jahr 6.20 CHF und im zehnten Jahr 8 CHF.

i) Bestimmen Sie die Differenz d der Folge. ___ / 2 P.

ii) Bestimmen Sie die Summe aller 20 Dividendenzahlungen.

___ / 3 P.

Aufgabe 2: Fortsetzung

(e) Die Folge (a_n) ist rekursiv definiert durch $a_1 = 1$ und für $n \geq 1$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{5}{2a_n}$$

Bestimmen Sie die ersten 4 Folgenglieder.

— / 3 P.

Aufgabe 3: Einführung in die Finanzmathematik**(16 Punkte)**

- (a) Frau Sommer eröffnet am 01.01.2023 ein Konto und zahlt ab dem 01.01.2024 jährlich bis zum 01.01.2031 5000 CHF auf Ihr Konto ein. Die Bank verspricht Ihr einen Zinssatz von 1.5% p.a. Bitte runden Sie auf 1 Stelle hinter dem Punkt.

Wie hoch ist der Kontostand von Frau Sommer am 01.01.2031?

___ / 4 P.

- (b) Herr Herbst hat Wünsche für die Zukunft. Er möchte gerne vom 01.01.2035 bis 01.01.2040 jeweils zum 01.01. des Jahres 3000 CHF ausgezahlt bekommen um seinen Oldtimer in die Inspektion zu bringen. Wieviel Geld muss Herr Herbst am 01.01.2024 auf seinem Konto haben, wenn die Bank ihm einen Zinssatz von 1% p.a. verspricht?

Bitte runden Sie auf 1 Stelle hinter dem Punkt.

___ / 4 P.

Aufgabe 3: Fortsetzung

(c) Die Herbst-Stiftung wird am 01.01.2024 ein Kapital von 5 Mio. CHF auf Ihrem Konto haben und möchte gerne jedes Jahr eine Spende überweisen, ohne dass sich das Kapital verändert. Derzeit kann das Geld für einen Zinssatz von 1.25% angelegt werden.

(i) Wie hoch darf die Spende sein, wenn bereits zum 01.01.2024 die erste Spende vorschüssig überwiesen werden soll, danach auf unbegrenzte Zeit jährlich wiederholend?
(Bitte runden Sie auf 1 Stelle hinter dem Punkt) _____ / 2 P.

(ii) Wie hoch darf die Spende sein, wenn die Spende ein Jahr später nachschüssig, zum 01.01.2025 überwiesen werden soll, danach auf unbegrenzte Zeit jährlich wiederholend?
_____ / 2 P.

Aufgabe 3: Fortsetzung

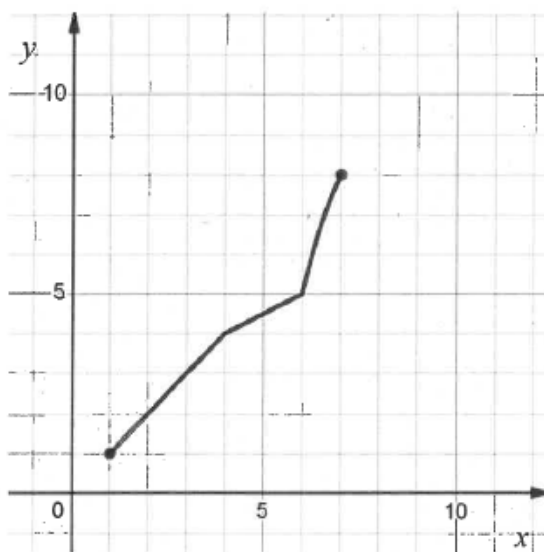
- (d) Sie haben ein Projekt zum Thema Nachhaltigkeit und möchten wissen, wie hoch Ihr IRR-Zins ist (IRR = Internal Rate of Return). Ihre Startinvestition ist 7.4 Mio. CHF. Im 1., 2. und 3. Jahr erwarten sie jeweils einen Rückfluss von 3 Mio. CHF.

Bitte berechnen Sie den IRR und geben diesen in Prozent, mit einer Stelle nach dem Punkt, an. ___ / 4 P.

Aufgabe 4: Funktionen und ihre Eigenschaften

(12 Punkte)

- a) Gegeben sei der Graph einer Funktion $y = f(x)$ mit dem Definitionsbereich $1 \leq x \leq 7$ (siehe Grafik).



- i) Genau eine der folgenden Aussagen ist zutreffend. Kennzeichnen Sie die korrekte Aussage mit einem Kreuz:

[1 Kreuz]

- Die Funktion $y = f(x)$ ist nicht umkehrbar.
- Der Punkt mit den Koordinaten $(5, 5)$ liegt auf dem Graphen von f .
- Die Funktion ist nicht stetig.
- $f(x) = x + 1$ für $1 \leq x \leq 4$
- $f(x) = x$ für $1 \leq x \leq 4$

___ / 2 P.

- ii) Wir betrachten nochmals dieselbe Funktion wie oben in der Grafik. Bestimmen Sie den Wert

$$f(f(6) + 2) = \dots$$

___ / 2 P.

Aufgabe 4: Fortsetzung

b) Für $x > 0$ betrachten wir die beiden Funktionen

$$g(x) = 2^{x-3} \quad \text{und} \quad s(x) = \log_2(x) + 3$$

i) Bestimmen Sie:

$$g(s(4)) = \dots$$

___ / 1 P.

ii) Bestimmen Sie:

$$s(g(4)) = \dots$$

___ / 1 P.

iii) Geben Sie die Umkehrfunktion g^{-1} von g explizit an:

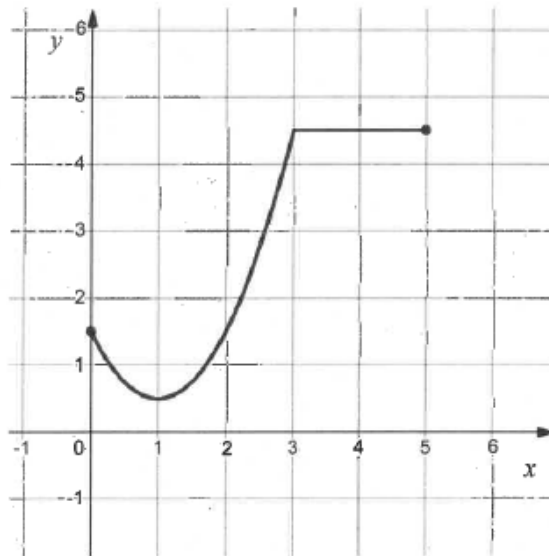
$$g^{-1}(x) = \dots$$

___ / 1 P.

Aufgabe 4: Fortsetzung

c) Nun betrachten wir die folgende Funktion (siehe Grafik unten):

$$y = f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{9}{2} & \text{für } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$



i) Geben Sie die Bildmenge von f in der Intervallschreibweise $I = [a; b]$ an:

Bild $_f =$

___ / 2 P.

ii) Lösen Sie die Gleichung

$$\frac{3}{2} = f(x)$$

___ / 3 P.

Aufgabe 5: Elementare Funktionen

(11 Punkte)

(a) Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 3$$

$$g(x) = 2x + 4$$

Berechnen Sie den Schnittpunkt (x, y) der beiden Funktionen.

___ / 3 P.

(b) Gegeben sind die Funktionen

$$q(x) = -3(x - 2)^2 + 4$$

$$h(x) = -6x + 19$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

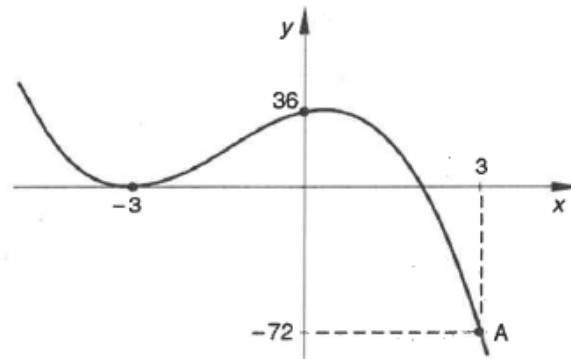
[1 Kreuz]

- Die beiden Funktionen schneiden sich nicht
- Der Scheitelpunkt der Funktion $q(x)$ liegt bei $(1; 1)$
- Die beiden Funktionen haben zwei Schnittpunkte
- $h(x)$ ist die Tangente an $q(x)$ im Punkt $T = (3; 1)$
- Der Schnittpunkt der beiden Funktionen ist $S = (3; 2.5)$

___ / 4 P.

Aufgabe 5: Fortsetzung

(c) Gegeben ist eine kubische Funktion 3. Grades gemäss untenstehender Skizze.



Für die Funktionsgleichung kann folgender Ansatz verwendet werden:

$$y(x) = a \cdot (x - x_1)^2 \cdot (x - x_2)$$

wobei $x_1 = -3$ und $a \neq 0$.

(i) Bestimmen Sie die unbekanntenen Konstanten a und x_2 . ___ / 3 P.

(ii) Wie lautet die Funktionsgleichung $y(x)$? ___ / 1 P.

Aufgabe 6: Ausgewählte ökonomische Anwendungen (14 Punkte)

(a) Gegeben ist die Nachfragefunktion

$$x_N(p) = -\frac{p}{2} + 25$$

in Abhängigkeit des Preises p . Bestimmen Sie Nachfragefunktion p_N in Abhängigkeit der nachgefragten Menge x . _____ / 2 P.

(b) Gegeben ist die Nachfrage- bzw. Angebotsfunktion

$$x_N(p) = -2p + 60 \quad \text{und} \quad x_A(p) = \frac{4p}{3} + 10$$

Bestimmen Sie den Preis, sowie die nachgefragte Menge im Marktgleichgewicht. _____ / 3 P.

Aufgabe 6: Fortsetzung

(c) Von der logistischen Funktion

$$f(x) = \frac{300}{1 + be^{-0.5x}}$$

ist $f(0) = 100$ bekannt. Bestimmen Sie den Parameter b und den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
 ___ / 2 P.

(d) Die Gewinnfunktion $G(x) = -x^3 + 4x^2 + 7x - 10$ hat die Gewinnzone

[1 Kreuz]

-]2, 5[
-]1, 5[
-] - 2, 1[
- [3, 5]
-]1, 2[

___ / 3 P.

(e) Gegeben sind die Stückkosten- bzw. Erlösfunktion

$$k(x) = 3x + 6 + \frac{21}{x} \quad \text{und} \quad E(x) = 30x.$$

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

[1 Kreuz]

- Der maximale Gewinn ist 120.
- Der Erlös ist an der Stelle $x = 5$ maximal.
- Der maximale Gewinn wird an der Stelle $x = 4$ angenommen.
- Der Break-Even ist an der Stelle $x = 0.5$.
- Der Gewinn hat kein Maximum.

___ / 4 P.

Aufgabe 6: Fortsetzung

Aufgabe 7: Grundlagen der Differentialrechnung**(12 Punkte)**a) Geben Sie die erste Ableitung der folgenden beiden Funktionen $f = f(x)$ und $g = g(x)$ an.

(i)

$$f(x) = \frac{1}{3}x^6 - 4\sqrt{x}$$

___ / 2 P.

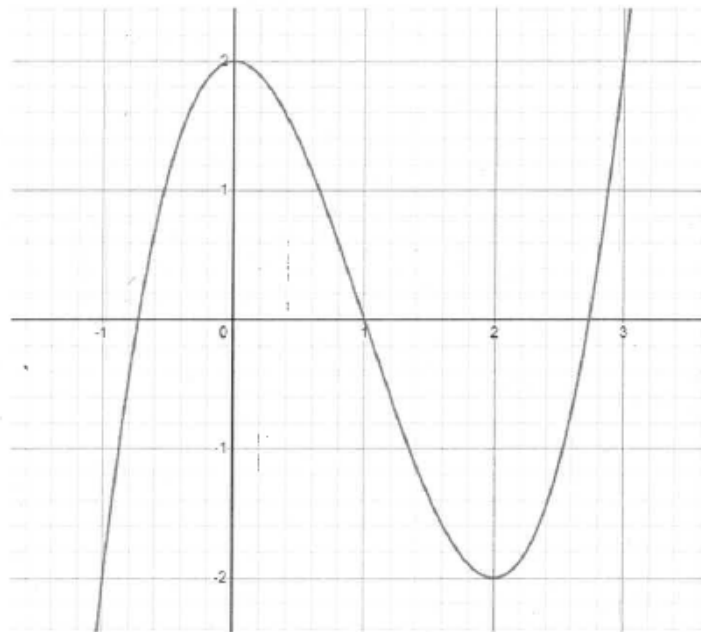
(ii)

$$g(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}$$

___ / 3 P.

Aufgabe 7: Fortsetzung

b) Im folgenden Bild ist der Graph einer Funktion $h = h(x)$ dargestellt.



Geben Sie mittels Intervallschreibweise an, für welchen Bereich auf der x -Achse die Ableitung $h'(x) \leq 0$ ist. ___ / 3 P.

Aufgabe 7: Fortsetzung

c) An welchen Stellen auf der x -Achse hat die Funktion

$$s(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 54x$$

die Steigung 0?

Geben Sie für eine der ermittelten Stellen die Tangentengleichung an.

___ / 4 P.

ENDE DER PRÜFUNG