Aufgabe 1: Mengen / Summen (9 Punkte)

(a) Gegeben sind die Mengen:

$$A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}, B = \mathbb{N}_0 \text{ und } C = [-9; 9[$$

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.

○ R ○ F $A \cap C = \{0, 1, 4, 9\}$

○ R ○ F $A \cup C = B \cup C$

○ R ○ F $A \subseteq \mathbb{Q}$

○ R ○ F $A \setminus B = \{0\}$

___ / 3 P.

(b) Berechnen Sie folgende Summe:

$$\sum_{k=1}^{99999} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

___ / 3 P.

Aufgabe 1: Fortsetzung

(c) Bestimmen Sie die Lösung x der folgenden Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{4} \left(x \cdot k^2 + 2x\right) = 76$$

___ / 3 P.

Aufgabe 2: Folgen und Reihen (12 Punkte)

(a) Geben Sie die folgenden Grenzwerte an.

(i) $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{24}{7n^2}\right)$ ___ / 1 P.

(ii) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-2n^2}{n(n-3)}\right)$ ___ / 1 P.

(iii) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2^n}\right)$ ___ / 2 P.

(b) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.

○ R ○ F Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist unbestimmt divergent.

○ R ○ F Durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 5a_n$ wird rekursiv eine arithmetische Folge definiert.

○ R ○ F Für die geometrische Folge $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{21}, -\frac{8}{147}, \ldots\right)$ gilt: $q = \frac{2}{7}$

○ R ○ F Das 10. Glied der geometrische Folge $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots\right)$ beträgt: $a_{10} = \frac{1}{1'024}$

___ / 3 P.

Aufgabe 2: Fortsetzung

(c) Berechnen Sie folgende Reihen:

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$ ___ / 2 P.

(ii) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^k$

___ / 3 P.

Aufgabe 3: Finanzmathematik (12 Punkte)

(a) Frau Weber zahlt am Ende jedes Jahres CHF 4'000 auf ein Konto ein. Der Zinssatz beträgt stets 2.3% p.a.

(i) Auf welchen Betrag ist ihr Guthaben nach 8 Jahren angewachsen? ___ / 2 P.

(ii) Wie viele Zinsen (inkl. Zinseszins) hat sie insgesamt erhalten ? ___ / 2 P.

(b) Sie stehen am Beginn des Studiums und wollen etwas Geld auf die Seite legen, um sich nach dem erfolgreichen Abschluss des Studiums eine Belohnung zu kaufen. Ihre Bank bietet Ihnen ein Ausbildungs-Sparkonto zu einem Vorzugszins von 1.8% p.a. an. Sie zahlen am 01. November 2021 CHF 3'000.- auf das Konto ein. Wie hoch ist das Kapital, das Sie am 31.08.2024 beziehen könn(t)en?

___ / 4 P.

Aufgabe 3: Fortsetzung

(c) Herr Meier plant, beginnend ab dem 31.12.2021, am Ende jedes Jahres CHF 4'500 auf ein Konto einzuzahlen, welches mit 1.2% p.a. verzinst wird. Nach wie vielen ganzen Jahren, oder gleichbedeutend nach wie vielen Einzahlungen wird der Kontostand CHF 50'000 überschritten haben?

___ / 4 P.

Aufgabe 4: Funktionen und ihre Eigenschaften (12 Punkte)

(a) Geben Sie für die folgenden Funktionen f und g je den maximal möglichen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ und $\mathbb{D}_g$ als Intervalle an.

(i)

$$f(x) = \sqrt{36 - x}$$

___ / 2 P.

(ii)

$$g(x) = \log_7(9x - 54)$$

___ / 2 P.

(b) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = (-1) \cdot x^4 + 81$$

mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.

○ R ○ F f ist streng monoton wachsend.

○ R ○ F f ist konkav gekrümmt.

○ R ○ F f hat genau zwei Nullstellen.

○ R ○ F f ist nach oben beschränkt.

___ / 3 P.

Aufgabe 4: Fortsetzung

(c) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = (x-4)^2 + 3$$

mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D} = [4, \infty[$.

Welche der folgenden Aussagen über f ist zutreffend?

- ○ $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x-3} + 4$
- ○ f besitzt keine Umkehrfunktion.
- ○ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$
- ○ Bild $f = [0, \infty[$
- ○ Bild $f^{-1} = \mathbb{R}$

___ / 2 P.

(d) Betrachten Sie die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion:

$$f(x) = 2x + 8$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $(f \circ f)^{-1}(x)$.

___ / 3 P.

Aufgabe 5: Elementare Funktionen (9 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, welche durch die beiden Punkte $P_1(0;\,6)$ und $P_2(14;\,0)$ verläuft.

___ / 2 P.

(b) Eine quadratische Funktion hat den Scheitelpunkt $S(1;\,2)$ und den y-Achsenabschnitt $c = 1.5$

Bestimmen Sie ihre Scheitelpunkt-Form.

___ / 3 P.

Aufgabe 5: Fortsetzung

(c) Für welche Werte des Parameters b besitzt die quadratische Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - b \cdot x + 2$$

nur 1 Nullstelle?

___ / 2 P.

(d) Welchen Wert muss der Parameter a annehmen, damit die Exponentialfunktion

$$f(x) = 2 \cdot e^{a \cdot x}$$

durch den Punkt $P(4; 162)$ verläuft?

___ / 2 P.

Aufgabe 6: Ökonomische Anwendungen (15 Punkte)

(a) Eine Ein-Produkt-Unternehmung ist einzige Anbieterin und setzt den Preis ihres Absatzes mit $p = 5$ GE/ME an. Die Unternehmung produziert ihr Produkt so, dass die Stückkosten in Abhängigkeit der Menge x wie folgt gegeben sind:

$$k(x) = x + 1 + \frac{3}{x}$$

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.

- ◯ R ◯ F Die Gesamtkostenfunktion lautet: $K(x) = x^2 + x + 1$
- ◯ R ◯ F Die Gewinnfunktion lautet: $G(x) = 5x - (x^2 + x + 3)$
- ◯ R ◯ F Für die gewinnmaximierende Menge x_C gilt: $x_C = 2$
- ◯ R ◯ F Die Stückkostenfunktion $k(x)$ ist eine streng monoton wachsende Funktion.

__ / 3 P.

(b) Betrachten Sie nun die abschnittsweise definierte Kostenfunktion

$$K(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x + 2, & \text{für} \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

und die Erlösfunktion $E(x) = 2x$. Beide haben als Definitionsbereich das Intervall $[0; 3]$.

(i) Wie gross ist die Menge im Gewinnmaximum?

__ / 3 P.

(ii) Berechnen Sie die Break-Even Menge.

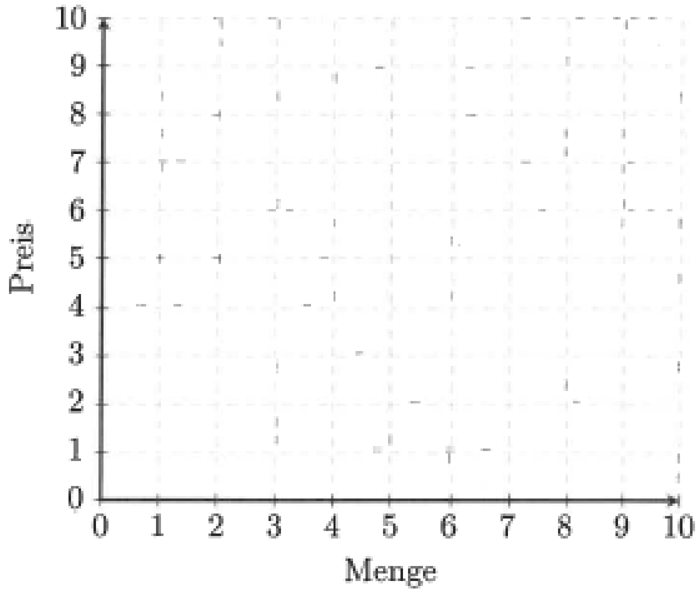
__ / 3 P.

Aufgabe 6: Fortsetzung

(iii) Für welche Menge $x \in [0;3]$ werden die Stückkosten minimal?

___ / 2 P.

(c) Zeichnen Sie die beiden unten vollständig umschriebenen Nachfrage- und Angebotsfunktionen in das folgende Koordinatensystem ein:



(i) Die lineare Nachfragefunktion besitzt folgende Eigenschaften:

1) Der Prohibitivpreis beträgt 6 GE/ME.
2) Die Sättigungsmenge lautet 9 ME.

___ / 2 P.

(ii) Die lineare Angebotsfunktion besitzt folgende Eigenschaften:

1) Der Mindestpreis beträgt 2 GE/ME.
2) Die Gleichgewichtsmenge beträgt 3 ME und der Gleichgewichtspreis ist 4 GE/ME.

___ / 2 P.

Aufgabe 7: Grundlagen der Differentialrechnung (12 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Funktion:

$$g(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{a}{2}x^2$$

Dabei ist a eine reelle Konstante.

Bestimmen Sie

(i) $g'(x)$ ___ / 1 P.

(ii) $g''(x)$ ___ / 1 P.

(b) Betrachten Sie die Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Bestimmen Sie $f'(x)$ ___ / 1 P.

(c) Betrachten Sie die Funktion:

$$f(x) = x^{0.3}$$

Bestimmen Sie $f'(x)$ ___ / 1 P.

Aufgabe 7: Fortsetzung

(d) Betrachten Sie die Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{5}x^2 - x$$

Bestimmen Sie die Steigung der Sekante von f im Intervall $[0\,;5]$.

___ / 3 P.

(e) Betrachten Sie die Funktion:

$$h(x) = 3x^4 - 3x$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten in den zwei Punkten von h:

(i) $P_1(0;\ 0)$

___ / 3 P.

(ii) $P_2(1;\ 0)$

___ / 2 P.

Aufgabe 8: Eingangskompetenzen (9 Punkte)

(a) Welche der folgenden Umformungen sind für alle positiven Zahlen a, b, c richtig?

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.

○ R ○ F $2^a + 2^{bc} = 2^{a+bc}$

○ R ○ F $\sqrt[c]{(2^a)^b} = 2^{\frac{ab}{c}}$

○ R ○ F $\left(2^a + 2^b\right)^c = 2^{ac} + 2^{bc}$

○ R ○ F $\sqrt[c]{2^a + 2^b} = 2^{\frac{a}{c}} + 2^{\frac{b}{c}}$

___ / 3 P.

(b) Welche der folgenden Umformungen sind für alle positiven Zahlen a und b richtig?

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.

○ R ○ F $\log_3 \frac{ab}{3} = -1 + \log_3 a + \log_3 b$

○ R ○ F $\log_3 \frac{1}{ab} = -\left(\log_3 a + \log_3 b\right)$

○ R ○ F $\log_3 \frac{a}{b} = \ln a - \ln b - \ln 3$

○ R ○ F $\log_3(ab) = \frac{\ln a + \ln b}{\ln 3}$

___ / 3 P.

Aufgabe 8: Fortsetzung

(c) Lösen Sie die folgende Gleichung nach der Variablen x auf:

$$(a-b)^2 - ax = (a+b)^3 - 4ab + bx$$

Gehen Sie dabei davon aus, dass a und b positive Zahlen sind.

Gesucht ist ein Ausdruck, in dem keine Klammern vorkommen.

___ / 3 P.

ENDE DER PRÜFUNG